**BT:** Chứng minh các hàm $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$ độc lập tuyến tính trên $(1,2)$.

**Giải:** Xét tổ hợp tuyến tính

$$a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x = 0 \quad \forall x \in (1,2).$$

Đặt vế trái là $f(x)$. Thì $f \equiv 0$ nên $f' \equiv 0$.

Đạo hàm $4n$ lần $(n \in \mathbb{N}^*)$, thì

$$f^{(4n)}(x) = a\sin x + 2^{4n} b \sin 2x + 3^{4n} c \sin 3x = 0 \ \forall x \in (1,2)$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(4n)}(x)}{3^{4n}} = \frac{a\sin x}{3^{4n}} + \frac{2^{4n}}{3^{4n}} b\sin 2x + c\sin 3x \quad \forall x \in (1,2)$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(4n)}(x)}{3^{4n}} = c\sin 3x$$

$\Rightarrow$ Chọn $x \in (1,2)$ s/c $\sin 3x \neq 0 \Rightarrow c = 0$

Thay $c = 0$ vào $a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x = 0$,

thì $a\sin x + b\sin 2x = 0 \ \forall x \in (1,2)$

Tương tự $a = b = c = 0$ $\square$

(2)

BT Cho các hàm $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$, $\cos 3x$ độc lập tuyến tính trên $(1,2)$.

Giải: Xét tổ hợp tuyến tính

$$g(x) = a\sin x + b\cos x + c\sin 2x + d\cos 2x + e\sin 3x + f\cos 3x = 0 \quad \forall x \in (1,2)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{g^{(4n)}(x)}{3^{4n}} = \frac{a\sin x + b\cos x}{3^{4n}} + \frac{2^{4n}}{3^{4n}}(c\sin 2x + d\cos 2x) + (e\sin 3x + f\cos 3x)$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{g^{(4n)}(x)}{3^{4n}} = e\sin 3x + f\cos 3x = 0 \quad \forall x \in (1,2).$$

Nếu $e^2+f^2 \neq 0$ thì
$$\begin{cases} \dfrac{e}{\sqrt{e^2+f^2}} = \cos\alpha \\ \dfrac{f}{\sqrt{e^2+f^2}} = \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow e\sin 3x + f\cos 3x = \sqrt{e^2+f^2}\,\sin(3x+\alpha) \not\equiv 0 \text{ trên } (1,2)$$

(C. Minh thêm)

$\Rightarrow e = f = 0$. Tương tự $a=b=c=d=0$ $\square$