Mối liên hệ giữa ánh xạ tuyến tính và ma trận biểu diễn của nó

Cho $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận biểu diễn A trong cặp cơ sở $(\vec{\alpha_1}, \dots, \vec{\alpha_n})$ và $(\vec{\beta_1}, \dots, \vec{\beta_m})$. $(\Rightarrow A \in \mathbb{R}^{m \times n})$

Đặt $\operatorname{Im} A = \left\{ Ax : x \in \mathbb{R}^n \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\}$

$\operatorname{Ker} A = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$

$\boxed{?}$ Mối liên hệ giữa $\operatorname{Im} f$ & $\operatorname{Im} A$?
$\operatorname{Ker} f$ & $\operatorname{Ker} A$

NX: $\forall$ ma trận $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ có thể coi như ánh xạ tuyến tính $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ như sau

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto B \cdot x \quad \text{(phép nhân ma trận)}$$

Ta xét hai ánh xạ sau

$\varphi: V \to \mathbb{R}^n$
$\vec{v} \mapsto$ tọa độ của $\vec{v}$ đối với cơ sở $(\vec{\alpha_1} \dots \vec{\alpha_n})$

$\psi: W \to \mathbb{R}^m$
$\vec{w} \mapsto$ tọa độ của $\vec{w}$ đối với cơ sở $(\vec{\beta_1} \dots \vec{\beta_m})$

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

GIẤY NHÁP

Giám thị ký 1

MÔN THI:...

Số báo danh:..

Họ và tên:...

Ta cần biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

tức là: $\psi \circ f = A \circ \varphi \quad (*)$

Do φ, ψ là đẳng cấu, nên $(*) \Leftrightarrow$

$$\boxed{\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = A}$$

Theo $\varphi(\vec{\alpha}_i) = (0, \ldots, 0, \underset{\text{vị trí thứ } i}{1}, 0, \ldots, 0) = \underbrace{\vec{e}_i}_{\text{vector cơ sở chính tắc thứ } i}$

$$\rightarrow \varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \varphi^{-1}(x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + x_n\vec{\alpha}_n$$

$$= \left(\vec{\alpha_1} \dots \vec{\alpha_n}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = (\psi \circ f)\left(\left(\vec{\alpha_1} \dots \vec{\alpha_n}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \psi\left(\left(f(\vec{\alpha_1}) \dots f(\vec{\alpha_n})\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \psi\left(\left(\vec{\beta_1} \dots \vec{\beta_m}\right) \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\psi(\vec{\beta_1}) \dots \psi(\vec{\beta_m})\right) \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

GIẤY NHÁP

Giám thị ký

MÔN THI:..

Số báo danh:..

Họ và tên:..

2

<u>Hệ quả</u>. Cho $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = A$ khi

+) $\operatorname{Im} f = \varphi^{-1}(\operatorname{Im} A)$

+) $\operatorname{Ker} f = \varphi^{-1}(\operatorname{Ker} A)$

$\operatorname{Im} A = \{AX : X \in \mathbb{R}^n\}$

$= \operatorname{span}\{\text{các cột của } A\}$

$\Rightarrow$ rank $f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} A$

$= \operatorname{rank} A$

Như vậy ta có thể nghiên cứu của f qua ma trận A và ngược lại. Tuy nhiên, ma trận A không là duy nhất, nên trong thực hành, ta tìm A đơn giản để dễ dàng tính toán.