Ma trận chuyển cơ sở và ma trận biểu diễn ánh xạ tt.

Ta quen biết tới thể hiện các đại lượng này, nhưng không thể lúc nào cũng tra sách, mà cần có một quy tắc dễ nhớ.

NX: Gọi sử $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$

$B = (b_{kl})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le p}}$

và $C = A\cdot B = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}$

Khi đó $\boxed{c_{ij} = \sum_{m=1}^{n} a_{im} b_{mj}}$

Như vậy khi nào nhìn thấy biểu thức có dạng này ta nghĩ tới $\boxed{\text{hàng} \times \text{cột}}$, tức nhân ma trận

Biểu diễn vector và biểu diễn tọa độ cho ta 2 cách để biểu diễn một đối tượng nên nắm thành thạo cả hai, sẽ có lợi cho

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

GIẤY NHÁP

Giám thị ký

MÔN THI:..

Số báo danh:..

Họ và tên:..

cả toán lý thuyết & thực hành.

Ta bắt đầu.

Gọi $(\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$, $(\vec{E_1}, \dots, \vec{E_n})$ là

hai cơ sở của kgvt V.

Ở đây ta quan niệm $(\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$ là cơ sở cũ

$(\vec{E_1} \dots \vec{E_n})$ —— mới.

Việc ~~...~~ biến đổi tọa độ liên quan tới đo đạc, vì khi đo đạc, mỗi người đo sẽ ở vị trí khác nhau nên tọa độ họ đo được ở cùng một vật thể được quan sát không giống nhau, mà phải thông qua biến đổi tọa độ.

Theo đn trong giáo trình, ta để thấy mà toàn chuyển cơ sở, ta xét các biểu thức chuyển thành $\boxed{\vec{E_j} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\vec{e_i}}$

Theo ĐN vừa này, ta có thể viết

$$\boxed{\left(\vec{\varepsilon_1} \dots \vec{\varepsilon_n}\right) = \left(\vec{e_1} \dots \vec{e_n}\right) C}$$

với $C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

→ ma trận hàng $1 \times n$ với giá trị là số là vector.

Viết như này rất có lợi. Ta xét vài ví dụ.

① <u>Biến đổi tọa độ</u>

Gỉả sử $\vec{v}$ có tọa độ là $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ trong

$(\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$ và có tọa độ là $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ trong

$(\vec{\varepsilon_1} \dots \vec{\varepsilon_n})$, khi đó mối liên hệ giữa x và y là gì?

Ta có $\vec{v} = y_1 \vec{\varepsilon_1} + y_2 \vec{\varepsilon_2} + \dots + y_n \vec{\varepsilon_n}$

$$= \left(\vec{\varepsilon_1} \dots \vec{\varepsilon_n}\right) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \left(\vec{e_1} \dots \vec{e_n}\right) \cdot C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

(phép nhân ma trận)

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

GIẤY NHÁP

Giám thị ký

MÔN THI:..

Số báo danh:..

Họ và tên:..

2

Suy ra $\boxed{x = C \cdot y}$

2) Ma trận biểu diễn.

Gs $f: V \to W$ có ma trận A trong cặp cơ sở $(\vec{\alpha_1} \dots \vec{\alpha_n})$, $(\vec{\beta_1} \dots \vec{\beta_m})$

(tức là $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$)

Xét cặp cơ sở mới $(\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$ và $(\vec{\varepsilon_1} \dots \vec{\varepsilon_m})$

Ta viết
$$\begin{cases} (\vec{e_1} \dots \vec{e_n}) = (\vec{\alpha_1} \dots \vec{\alpha_n}) \cdot C \\ (\vec{\varepsilon_1} \dots \vec{\varepsilon_m}) = (\vec{\beta_1} \dots \vec{\beta_m}) \cdot D \end{cases}$$

Theo đ/n,
$$f(\vec{\alpha_j}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{\beta_i}$$

$$\Rightarrow (f(\vec{\alpha_1}) \dots f(\vec{\alpha_n})) = (\vec{\beta_1} \dots \vec{\beta_m}) \cdot A$$

Ta thấy ma trận biểu diễn f trong cặp cơ sở mới như sau:

$$\left(f(\vec{e_1}) \cdots f(\vec{e_n})\right) = \left(f(\vec{\alpha_1}) \cdots f(\vec{\alpha_n})\right) \cdot C$$

$$= \left(\vec{\beta_1} \cdots \vec{\beta_m}\right) \cdot A \cdot C$$

$$= \left(\vec{\varepsilon_1} \cdots \vec{\varepsilon_m}\right) \cdot D^{-1} \cdot A \cdot C$$

Như vậy $D^{-1} \cdot A \cdot C$ là ma trận biểu diễn của f trong cặp cơ sở $(\vec{e_1} \cdots \vec{e_n})$ và $(\vec{\varepsilon_1} \cdots \vec{\varepsilon_m})$.

<u>NX</u>: Nếu $V = W$, tức là $f: V \circlearrowleft$ là tự đẳng cấu, và A là ma trận của f trong cơ sở $(\vec{\alpha_1} \cdots \vec{\alpha_n})$, thì ma trận của f trong cơ sở mới $(\vec{e_1} \cdots \vec{e_n})$ <u>được cho bởi</u> là $C^{-1} \cdot A \cdot C$. (người ta nói $C^{-1} \cdot A \cdot C$ đồng dạng với A)

Điều đó cho thấy ma trận của tự đẳng cấu xét trong cặp cơ sở trùng nhau luôn là <u>ma trận đồng dạng</u>. Vì vậy nghiên cứu các

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

GIẤY NHÁP

Giám thị ký

3

MÔN THI:..

Số báo danh:..

Họ và tên:..

ma trận đúng dạng như nhau cũng tự nhiên.

Bình luận thêm:

- Cách trình bày này như ở trong sách của GS. Nguyễn Hữu Việt Hưng.
- Cách viết này có ích để trình bày lý thuyết mới các môn khác như hình học affine & euclide (còn gọi là hình học tuyến tính), các biến đổi xạ ảnh, tensor (chung đa tuyến tính) cần thiết cho hình học vi phân & vật lý.